山东师大学报（自然科学版） Journal of Shandong Normal University
1987年 第2卷 第3期(总第19期) (Natural Sciences Edition)Vol.2, No.3 (Sum No. 19) 1987

托马斯进动与反常塞曼效应

李 法 和

提 要

本文对运动速度彼此不平行的参考系之间，连续进行了洛仑兹变换。对由此出现的托马斯进动作了分析，并借以说明如何得出反常塞曼效应的正确公式。

一、理论与实验的矛盾

光谱线在磁场中会发生分裂，总自旋S＝0时，光谱线一分为三，称为正常塞曼效应。在弱磁场中，当S≠0时，一条谱线会分的更多，但线距也更小，称为反常塞曼效应，这属于量子力学中S—L耦合的光谱精细结构问题。[2]对正常塞曼效应，利用电子轨道磁距与外磁场的相互作用，就可以精确的进行计算和分析。但对于反常塞曼效应，仅考虑电子轨道运动就不行了[2]。在1925年，乌仑贝克和古兹米特（Uhlebeck and Goudsmit）引进了电子自旋的概念，并用来解释反常塞曼效应，但结果却遇到了令人迷惑的困难，因为实验表明，电子轨道距 $\vec{L}$ 与磁距 μ_L 的关系为

$$\vec{\mu}_L=\frac{e}{2mc}\vec{L} \tag{1}$$

而电子自旋矩 $\vec{S}$ 与自旋磁矩的关系为

$$\vec{\mu}_S=\frac{e}{mc}\vec{S} \tag{2}$$

考虑量子化条件，可加一个耦合因子g来统一表示为

$$\vec{\mu}=\frac{ge}{2mc}\vec{L} \tag{3}$$

g称为朗德因子，是量子化的，可取1与2的值，当g＝1时，③式与①式同，对应的是轨道矩，当g＝2时，就与②式同，对应的即为自旋矩。另外，磁矩与外磁场的相互作用能为

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \tag{4}$$

所受之磁力矩为

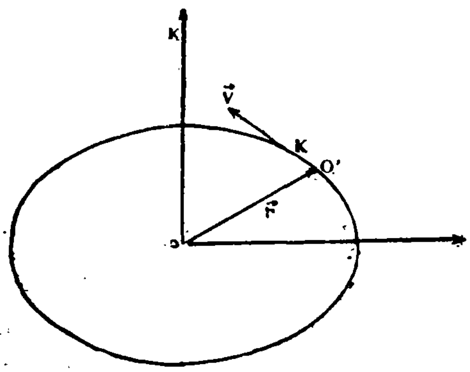
收稿日期：1986年10月10日
修回日期：1986年11月19日

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{5}$$

对于反常塞曼效应，上面的$\vec{\mu}$应为$\vec{\mu}_s$。再利用动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{6}$$

就可进行运算，但对于动量矩定理的使用，必须考虑到参考系的选择问题。



图(一)

现在我们选两个参考系，一为与我们相对静止的实验室k系，或原子核系，因为原子核可以认为是不动的。另一个为与电子相对静止的转动参考系k′系，如图（一）所示。

可把K′系原点O′取在电子上，并设电子以速度$\vec{v}$运动。设我们在实验室所加的外磁场为$\vec{B}$，并注意除外加的$\vec{B}$外，原子核还要在电子上产生电场$\vec{E}$。从电子所在的k′系来看，原子核是运动的电荷，所以还应产生磁场，按相对论的变换关系并忽略二级效应时有

$$\triangle\vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E} \tag{7}$$

因此，由k′系看总磁场应为

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E} \tag{8}$$

而自旋矩的运动方程为

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{k'} = \vec{\mu}_s \times \vec{B}' = \vec{\mu}_s \times \left(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E}\right) \tag{9}$$

自旋磁距与外磁场的相互作用能为[1]

$$U' = -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}' = -\vec{\mu}_s\cdot\left(\vec{B} - \frac{1}{C}\vec{v}\times\vec{E}\right); \tag{10}$$

其中的$\vec{E}$为原子核在电子上产生的库仑场。由于原子核接近球对称，故电势仅为γ的函数，

即：$$\varphi = \varphi(\gamma) \tag{11}$$

而 $$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{d\gamma}\vec{e}_\gamma = -\frac{\vec{\gamma}}{\gamma}\frac{d\varphi}{d\gamma} \tag{12}$$

所以 $$e\vec{E} = -\frac{\vec{\gamma}}{\gamma}\frac{\alpha V}{\alpha\gamma} \tag{13}$$

其中$V = e\varphi$，为电子在γ处的电势能。把③和⑬式代入⑩式可得：

$$U' = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}' = -\frac{ge}{2mc}\vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2mc^2}\vec{S} \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\upsilon})\frac{dV}{\gamma d\gamma}$$

$$= -\frac{ge}{2mc}\vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2m^2c^2}(\vec{S} \cdot \vec{L})\frac{1}{\gamma}\frac{dv}{dr} \qquad (14)$$

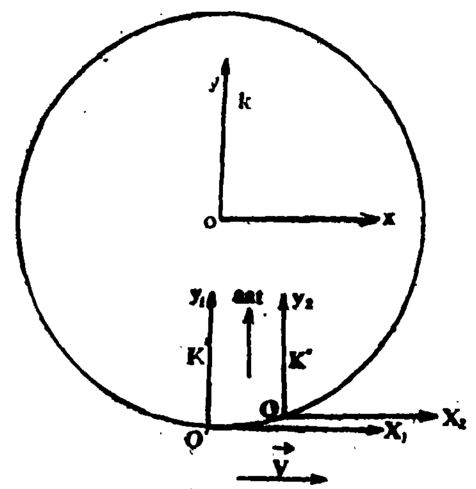
其中$\vec{L} = m(\vec{\gamma} \times \vec{v})$；为电子轨道角动量。

现在我们来分析这个结果：⑭式的第二项，代表了电子自旋和轨道矩的耦合作用，它决定谱线的间距，但这个相互作用项太大，如按此计算，恰为正确值（即实验值）的两倍，这问题能否靠选择g因子来解决呢？不行，尽管⑭式的g值未给出，实际上它只能取2，因为我们讨论的是反常塞曼效应，是由电子自旋引起的效应。前已指出，对于电子自旋距g应为2，否则就不是反常塞曼效应，如果g取2第二项就大了一倍与实验不符。如果取1第二项正好，但又不与反常塞曼效应相对应。矛盾就是这样尖锐而又不可调和，问题出在那里呢？

后来，托马斯（Thomas）指出，这一问题的关键，是人们在计算时忽略了相对论效应。

二、托马斯进动

狭义相对论中的洛仑兹变换，是两个参考系之间的变换。托马斯指出，如果有三个参考系，而且速度不一定同方向，那么，在它们之间进行连续的洛仑兹变换时，就将出现转动效应。[1-3]而前面所讨论的问题，恰存在着三个参考系之间的变换问题。因此，⑭式有两个问题：一是不应用两个参考系，而应当用三个参考系来表示，即实验室K系，及时刻t时对电子静止的K′系，和在t + dt时具有速度为$\vec{a}dt$（与$\vec{v}$垂直）的K″系。$\vec{a}$为电子t时刻的加速度，如图（二）所示。

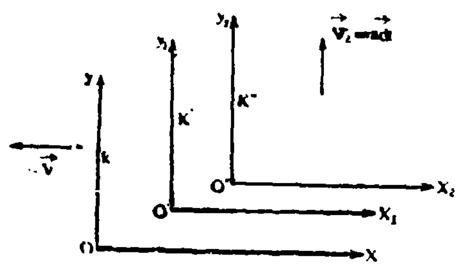


图（二）

当然，K′和K″都是作为在某一时刻进行讨论时的瞬时惯性系。这是在相对论力学中经常运用的概念。

二是不应在K′系中而应当在实验室K系中进行计算。这样，就有一个由K″系→K′→K三个参考系间的变换问题。其困难之处在于$\vec{v}$和$\vec{v}' = \vec{a}dt$方向不同。现在我们来讨论运动方向不同的参考系间连续洛仑兹变换问题。

设K′对K系的运动速度为$\vec{\upsilon}_1(=\vec{\upsilon})$沿×方向；而K″对K′系的运动速度为$\vec{\upsilon}_2(=\vec{a}dt)$沿y方向。见图（三）



图(三)

先看$K \to K'$系间的变换关系·我们仍按习惯规定坐标轴互相平行，且$t = t' = 0$时两原点重合，则有：

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma_1 (x' + v_1 t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma_1 \left(t' + \frac{v'}{c^2} x'\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

其中：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

而K'—K''间的变换关系为：

$$\left.\begin{aligned} y' &= \gamma_2 (y'' + v_2 t'') \\ x' &= x'' \\ z' &= z'' \\ t' &= \gamma_2 \left(t'' + \frac{v_2}{c^2} y''\right) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

其中：

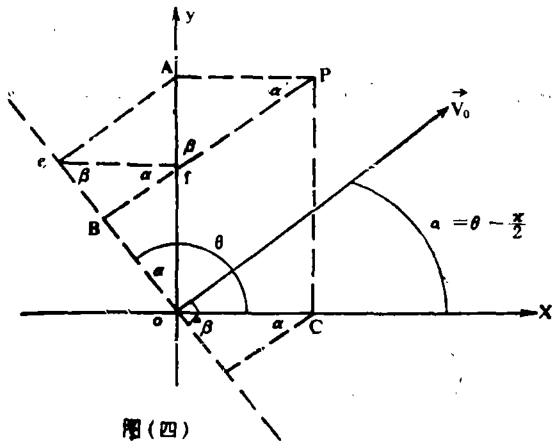
$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

所以K''——K间的变换关系，可由上两组合并而得：

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma_1 \left[x'' + \gamma_1 \frac{v_1 v_2}{c^2} y'' + \gamma_1 v_1 t''\right] \\ y &= y' = \gamma_2 [y'' + v_2 t''] \\ z &= z' = z'' \\ t &= \gamma_1 \left[\gamma_2 \left(t'' + \frac{v_2^2}{c^2} y''\right) + \frac{v_1}{c^2} x''\right] \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

⑰式即为互相垂直运动的参考系连续变换的公式。为了避免繁琐的运算，我们可借助于几何进行分析。[3]

设$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$的合速度(用相对论速度合成公式即可求得)，对K系为$\vec{v}_0$，则K''系上的某定点P在K系中的运动，将画出一个与$\vec{v}_0$平行的直线。P点在与$\vec{v}_0$垂直的直线上投影为点B，而$\overline{OB}$与$\vec{v}_0$垂直，所以P点在以速度$\vec{v}_0$运动的过程中，$\overline{OB}$保持不变。参见图（四）。



图(四)

P点在K系中的坐标由图（四）可看出：

$$X=\overline{OC}=\overline{AP}$$

$$Y=\overline{OA}=\overline{GP}$$

$$\overline{Be}=\overline{OD}=x\cos\beta$$

$$\overline{Oe}=y\cos\alpha$$

而 $\overline{OB}=\overline{Oe}-\overline{Be}=y\cos\alpha-x\cos\beta=y\sin\theta+x\cos\theta=$恒量； (18)

把连续变换的⑰式代入⑱式中可得：

$$\overline{OB}=X\cos\theta+y\sin\theta$$

$$=\gamma_1\left(x''+\gamma_2\frac{v_1v_2}{C^2}y''+\gamma_2v_1t''\right)\cos\theta+\gamma_2\left(y''+v_2t''\right)\sin\theta$$

$$=X''\gamma_1\cos\theta+y''\left(\gamma_1\gamma_2\frac{v_1v_2}{C^2}+\gamma_2\sin\theta\right)+t''(\gamma_1\gamma_2v_1\cos\theta+\gamma_2v_2\sin\theta)=\text{恒量} \quad (19)$$

因为$\overline{OB}$为恒量，应与时间无关，故上式中时间系数应为零。即

$$\gamma_1\gamma_2v_1\cos\theta+\gamma_2v_2\sin\theta=0$$

所以 $$tg\theta=\frac{\gamma_1v_1}{v_2} \quad (20)$$

又因为坐标轴都平行，所以⑲式中x″和y″的系数应为cosθ″和sinθ″即应有：

$$x\cos\theta+y\sin\theta=x''\cos\theta''+y''\sin\theta'' \quad (21)$$

二式比较可得：

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta''&=\gamma_1\cos\theta\\ \sin\theta''&=\left(\gamma_1\gamma_2\frac{v_1v_2}{C^2}\cos\theta+\gamma_2\sin\theta\right)\\ &=\left(-\gamma_1\gamma_2\frac{v_1v_2}{C^2}\cdot\frac{v_2}{\gamma_1v_1}+\gamma_2\right)\sin\theta=\frac{1}{\gamma_2}\sin\theta\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

所以 $$tg\theta''=\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}tg\theta=-\frac{v_1}{\gamma_2v_2} \quad (23)$$

上式表明，合成速度$\vec{v}_0$如对x的夹角为$\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$，则对x″轴的夹角就为$\left(\theta''-\frac{\pi}{2}\right)$，而由㉓式可明显看出$\theta\neq\theta''$。这表明，在连续使用洛仑兹变换时，导致了角度的旋转。由以上公式可算出角度的变化为：（$\because\theta-\theta''$很小），

$$\theta-\theta''\doteq \operatorname{tg}(\theta-\theta'')=\frac{v_1 v_2(1-\gamma_1\gamma_2)}{(\gamma_2 v_2^2+\gamma_1 v_1^2)} \tag{24}$$

如果v_1和v_2均≪C时，分母中的γ_1和γ_2可近似地看为1，但如把分子中的γ_1和γ_2也看成1，其值就等于零了。因此，分子上的γ应计及高级效应，即应为：

$$1-\gamma_1\gamma_2=1-\frac{1}{\left[\left(1-\frac{v_1^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{v_2^2}{C_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\doteq 1-\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{C^2}+\frac{v_2^2}{C^2}\right)\right]\doteq-\frac{\left(v_1^2+v_2^2\right)}{2C^2}$$

$$\text{所以}\ \theta-\theta''\doteq\frac{v_1 v_2\left(1-\gamma_1\gamma_2\right)}{v_1^2+v_2^2}\doteq-\frac{v_1 v_2}{2C^2} \tag{25}$$

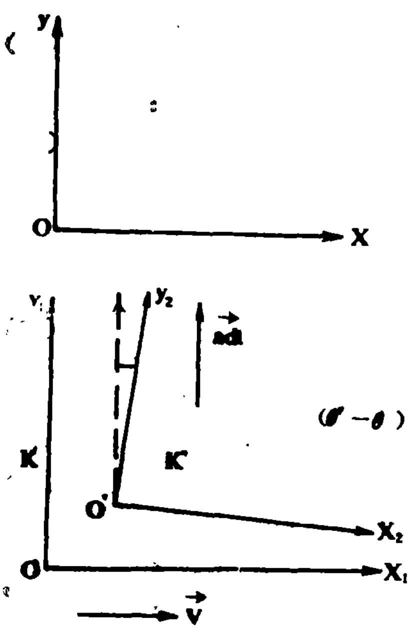
即（$\theta''>\theta$）

以上结果，是在$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$互相垂直时得出的，如果$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$互相平行，就没有这种效应了，即只有垂直运动的部分，才产生上述转动效应。[3]因此，也可以把㉕式一般的表示为：

$$\vec{d\theta}=-\frac{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}{2c^2} \tag{26}$$

上述结论，就称为托马斯效应，也称托马斯进动。就是说，从K系观察，K″系表现有转动效应。如图（五）所示。

应当指出，这纯粹是运动学即相对论效应，而与动力学中的进动毫不相干。



图（五）

三、托马斯效应的运用

现在我们把一般情况下的托马斯进动公式㉖用到我们前面所分析的电子自旋与磁场的相互作用上去，这时由㉖式所给的相应转角应为：

$$d\theta=-\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{2c^2}dt;$$

即在K系来计算时，电子自旋角动量应出现进动效应，其托马斯进动的角速度应为：

$$\vec{\omega}_T = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = -\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{2c^2} \tag{27}$$

这相当于力学中坐标变换时的牵连变化，因在转动参考系中任一矢量$\vec{J}$的绝对变化率应为：

$$\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_k = \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{k'} + \vec{\omega}\times\vec{J} \tag{28}$$

因此，我们若在k系中计算电子自旋矩的变化时，应当是：

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_k = \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{k'} + \vec{\omega}_T\times\vec{s} \tag{29}$$

式中$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{k'}$即为前面所给出的⑨式，代入上式即得：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_k &= \vec{\mu}_s\times\vec{B}' + \vec{\omega}_T\times\vec{s} = \frac{ge}{2mc}\vec{s}\times\vec{B}' + \vec{\omega}_T\times\vec{s}\\ &= \vec{s}\times\left(\frac{ge}{2mc}\vec{B}' - \vec{\omega}_T\right)\end{aligned} \tag{30}$$

而由k系计算的$\vec{s}$与外磁场的相互作用能即为：

$$U = -\vec{s}\cdot\left(\frac{ge}{2mc}\vec{B}' - \vec{\omega}_T\right) = U' + \vec{s}\cdot\vec{\omega}_T \tag{31}$$

其中$U' = -\frac{ge}{2mc}\vec{s}\cdot\vec{B}'$，即为前面的⑭式，可见㉛式比⑭式多出了一项，这恰是托马斯进动所提供的。

现在我们来分析$\vec{\omega}_T$：

因为 $\vec{\omega}_T = -\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{2c^2}$

其中$\vec{a}$为电子的加速度，在$v\ll c$和$\vec{B}$不很强的情况下，

$$\vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E} = \frac{1}{m}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\frac{dv}{dr}\right)$$

所以 $$\vec{\omega}_T = -\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{2c^2} = \frac{\vec{v}\times\vec{r}}{2mc^2 r}\frac{dv}{dr} = -\frac{(\vec{r}\times m\vec{v})}{2m^2c^2r}\frac{dv}{dr}$$

$$= -\frac{\vec{L}}{2m^2c^2r}\ \frac{dv}{dr} \tag{32}$$

代入㉛式中，即得到：

$$U = -\frac{ge}{2m^2c^2r}\vec{S}\cdot\vec{B} + \frac{(g-1)}{2m^2c^2r}(\vec{S}\cdot\vec{L})\ \frac{dv}{dr} \tag{33}$$

这就是所要求的正确结论。

由㉝式清楚的看出，托马斯进动对能量的附加贡献，恰好使S—L耦合项减少了一半，这样，g＝2就完全正确了，这既对应于反常塞曼效应，谱线裂距又恰与实验相符合，从而也证明了托马斯效应的正确性。

参 考 文 献

〔1〕J·D·Jackson：经典电动力学（下册），人民教育出版社，1980。
〔2〕L·I·Schiff：量子力学，人民教育出版社，1982。
〔3〕张永立：相对论导论，云南人民出版社，1980。

THOMAS EFFECT AND ANOMALOUS ZEEMAN EFFECT

Li Fahe

Abstract

This paper analyzes Thomas effect that appears in the process of continuous Lorentz transformation between the reference systems whose motion is in different directions, and explains how to obtain the correct formula of anomalous Zeeman effect.